COURS

DE

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE,

PAR

M. ÉMILE MATHIEU,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

—

1873

jusqu'à l'infini, et le second Σ à toutes les valeurs de λ qui correspondent à une même valeur de n.

Supposons que la température à l'instant initial soit donnée par la fonction $f(r, \alpha)$; alors on aura la formule

$$\Sigma\Sigma Q_n(r, \lambda_{n,i})(A_{n,i}\cos n\alpha + B_{n,i}\sin n\alpha) = f(r, \alpha),$$

et l'on en déduira les coefficients comme au n° 53.

MEMBRANE DE FORME ELLIPTIQUE.

57. Nous allons maintenant nous occuper du mouvement vibratoire d'une membrane dont le contour, fixé invariablement, est une ellipse. Cette question est beaucoup plus difficile que lorsque le contour est un cercle, et nous l'avons résolue pour la première fois dans le tome XIII du *Journal* de M. Liouville, 2e série.

Nous nous servirons des coordonnées définies au n° 28, et dont nous avons déjà fait l'application dans le n° 32; mais il convient d'entrer d'abord dans de nouveaux détails sur ce système de coordonnées.

Désignons par A le demi-grand axe de la membrane elliptique, et par c la demi-distance des foyers; prenons pour axes des x et des y les axes de symétrie de l'ellipse; puis adoptons un second système de coordonnées déterminé par les ellipses et les hyperboles qui ont les mêmes foyers que le contour de la membrane.

Une quelconque de ces ellipses est donnée par l'équation

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - c^2} = 1, \tag{1}$$

dans laquelle ρ est $> c$, et si l'on pose

$$\rho = c\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}, \quad \rho' = \sqrt{\rho^2 - c^2} = c\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2},$$

ρ et ρ' sont le demi-grand axe et le demi-petit axe de cette ellipse, et β le paramètre thermométrique.

Une quelconque des hyperboles homofocales a pour équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

où ν est $< c$; et si l'on pose

$$\nu = c \cos\alpha, \quad \nu' = \sqrt{c^2 - \nu^2} = c \sin\alpha,$$

ν et ν' sont les demi-axes de cette hyperbole, et α son paramètre thermométrique.

On passe des coordonnées x et y aux coordonnées α et β au moyen des formules

$$(3) \qquad x = c\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}\cos\alpha, \quad y = c\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}\sin\alpha,$$

que l'on déduit des équations (1) et (2). Si l'on voulait avoir des formules qui pussent s'appliquer immédiatement au cercle, on adopterait

$$(4) \qquad x = \rho\cos\alpha, \quad y = \rho'\sin\alpha.$$

Soit M un point qui provient de l'intersection de l'ellipse $\beta = \beta_1$ et de l'hyperbole $\nu = \nu_1$. Prolongeons l'ordonnée du point M jusqu'à sa rencontre en N avec le cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse. On voit, d'après la première des équations (4), que l'angle α est égal à l'angle que fait le rayon mené du centre au point N avec l'axe des x, et, comme cet angle a pour cosinus $\frac{\nu}{c}$, il est aussi celui que fait avec l'axe des x l'asymptote à la branche d'hyperbole qui contient le point M, et le rayon mené du centre au point N est cette asymptote.

Si l'on suppose que β soit positif, l'équation β=const. représente une ellipse entière; mais α = const. ne représente plus qu'une des quatre branches de l'hyperbole terminée à l'axe transverse, et l'hyperbole entière est donnée par les quatre équations

$$\alpha = \alpha_1, \quad \alpha = \pi - \alpha_1, \quad \alpha = \pi + \alpha_1, \quad \alpha = 2\pi - \alpha_1,$$

qui sont celles des quatre branches.

Il est bon aussi de considérer les positions limites de ces ellipses et de ces hyperboles; pour $\beta = 0$, l'ellipse se réduit à la droite qui joint les foyers F et F'; l'équation $\alpha = 0$ représente la ligne Fx bornée en F et indéfinie dans le sens des x positifs; $\alpha = \pi$ représente la ligne F'x' indéfinie dans le sens des x négatifs; enfin $\alpha = \frac{\pi}{2}$ détermine l'axe des y positifs, et $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ l'axe des y négatifs.

58. w désignant le déplacement normal d'un point de la membrane, nous savons (n° 49) que l'on a l'équation

$$(5) \qquad m^2\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right) = \frac{d^2w}{dt^2};$$

et, en y faisant

$$w = u \sin 2\lambda mt,$$

on obtient

$$(6) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = -4\lambda^2 u.$$

Substituons ensuite à x et y les coordonnées α et β; E étant le signe d'un cosinus hyperbolique, nous aurons, d'après le n° 28,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{2}{c^2[\mathrm{E}(2\beta) - \cos 2\alpha]}\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2}\right),$$

et l'équation (6) devient

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} = -2\lambda^2c^2[\mathrm{E}(2\beta) - \cos 2\alpha]\,u.$$

Posons

$$u = \mathrm{PQ},$$

en regardant P comme fonction de la seule variable α, et Q comme fonction de la seule variable β, et nous aurons, au lieu de l'équation précédente,

$$\mathrm{Q}\frac{d^2\mathrm{P}}{d\alpha^2} + \mathrm{P}\frac{d^2\mathrm{Q}}{d\beta^2} = -2\lambda^2c^2[\mathrm{E}(2\beta) - \cos 2\alpha]\,\mathrm{PQ}$$

ou

$$-\frac{1}{\mathrm{P}}\frac{d^2\mathrm{P}}{d\alpha^2} + 2\lambda^2c^2\cos 2\alpha = \frac{1}{\mathrm{Q}}\frac{d^2\mathrm{Q}}{d\beta^2} + 2\lambda^2c^2\mathrm{E}(2\beta).$$

Le premier membre ne peut renfermer que α, et le second que β; ils sont donc égaux à une même constante R; de sorte qu'on a, au lieu d'une équation aux différences partielles, deux équations différentielles du second ordre,

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2P}{d\alpha^2} + (R - 2\lambda^2c^2\cos 2\alpha)P = 0, \\ \dfrac{d^2Q}{d\beta^2} - [R - 2\lambda^2c^2E(2\beta)]Q = 0. \end{cases}$$

La première de ces équations convient à la membrane circulaire si l'on y fait $c = 0$, et nous avons vu que l'on doit alors prendre pour R le carré d'un nombre entier, afin que la fonction P ait la période 2π. Il n'en résulte pas que la même chose ait lieu ici, car on ne voit pas qu'elle ne dépende pas de λc; on peut seulement affirmer que si la constante R dépend de cette quantité, elle se réduit au carré d'un nombre entier pour $c = 0$.

Supposons que nous connaissions une des valeurs de R et que nous ayons trouvé des valeurs de P et Q qui satisfassent à ces deux équations; alors pour que la formule

$$w = PQ \sin 2\lambda mt$$

représente un mouvement vibratoire possible de la membrane, il faudra encore déterminer λ par la condition que Q soit nul pour la valeur de β relative au contour.

RÉFLEXIONS SUR LA CONSTANTE R.

59. Le premier objet que nous devions nous proposer est donc de chercher à déterminer la constante R. Or si l'on prend un point (α, β) intérieur au contour de la membrane et qu'on fasse mouvoir ce point sur l'ellipse, dont le paramètre est β, jusqu'à ce qu'il ait repris sa position primitive, la coordonnée β ne changera pas, et la coordonnée α s'accroîtra de 2π. Donc w doit rester le même quand on y changera α en $\alpha + 2\pi$; il en résulte que P est une fonction périodique et dont la période est 2π, et cette condition détermine la constante R.

Pour $c = 0$, R se réduit au carré d'un nombre entier g et la fonction P se réduit à

$$A \sin g\alpha + B \cos g\alpha,$$

A, B étant deux constantes arbitraires; les deux solutions particulières en lesquelles il est le plus naturel de la diviser sont $A \sin g\alpha$, $B \cos g\alpha$. Or il est très-aisé de reconnaître que la solution générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre peut être partagée en deux solutions particulières dont l'une soit nulle, et l'autre soit maximum ou minimum pour la valeur zéro donnée à la variable. Posons donc

$$P = P_1 + P_2,$$

P_1 étant une solution de l'équation (7) qui s'annule pour $\alpha = 0$, et P_2 une solution qui est maximum ou minimum pour cette valeur. Alors ces deux fonctions pour $c = 0$ se réduisent, la première à $A \sin g\alpha$, la seconde à $B \cos g\alpha$.

On peut voir dans notre Mémoire quelles sont les considérations qui nous ont guidé dans la recherche de R; mais nous allons ici procéder immédiatement à sa détermination; elle se fera simultanément avec celle des fonctions P_1 et P_2; nous verrons de plus que la constante R qui se trouve dans P_1 n'est pas la même que celle qui se trouve dans P_2. De sorte qu'on ne peut déterminer R de manière que la solution générale de l'équation (7) ait pour période 2π, mais seulement de manière que P_1 ou P_2 ait cette période.

DÉVELOPPEMENTS DE LA FONCTION P_2 ET DE LA CONSTANTE R QUI Y ENTRE SUIVANT LES PUISSANCES DE c.

60. Remplaçons λc par h, et la première équation (7) deviendra

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} + (R - 2h^2 \cos 2\alpha)P = 0;$$

il s'agit de déterminer la solution P_2 de cette équation, qui a 2π pour période et qui est maximum pour $\alpha = 0$.

Désignant par g un nombre entier, nous poserons

$$R = g^2 + \omega h^2 + \beta h^4 + \gamma h^6 + \delta h^8 + \ldots,$$

et nous chercherons à déterminer les coefficients ω, β, γ,... d'après la condition que P_2 ait 2π pour période.

Faisons aussi, dans l'équation différentielle

$$P = P_2 = \cos g\alpha + h^2 \mathrm{p}, \quad R = g^2 + \mathrm{O} h^2,$$

et nous aurons

$$\frac{d^2\mathrm{p}}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2 \cos 2\alpha + \mathrm{O}h^2)\mathrm{p} - (2\cos 2\alpha \cos g\alpha - \mathrm{O})\cos g\alpha = 0.$$

Posons ensuite

$$\mathrm{p} = p + h^2 \mathrm{p}_1, \quad \mathrm{O} = \omega + \mathrm{B}h^2,$$

et nous aurons, en séparant les termes de moindre degré en h des autres,

$$(\mathrm{I}) \qquad 0 = \frac{d^2 p}{d\alpha^2} + g^2 p - 2\cos 2\alpha \cos g\alpha - \omega \cos g\alpha,$$

$$(b) \quad 0 = \frac{d^2\mathrm{p}_1}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2\cos 2\alpha + \mathrm{B}h^4)\mathrm{p}_1 + (-2\cos 2\alpha + \mathrm{B}h^2)p + \mathrm{B}\cos g\alpha.$$

Pour résoudre l'équation (I), nous remplacerons $2\cos 2\alpha \cos g\alpha$ par $\cos(g+2)\alpha + \cos(g-2)\alpha$, et nous poserons

$$p = a\cos(g+2)\alpha + b\cos g\alpha + c\cos(g-2)\alpha;$$

on trouve immédiatement

$$a = \frac{-1}{4(g+1)}, \quad c = \frac{1}{4(g-1)}, \quad \omega = 0;$$

pour b, il n'est pas déterminé; et, en effet, P_2 se réduit à $\cos g\alpha$ pour $h = 0$; mais si l'on suppose que l'on ait obtenu son expression et qu'on la multiplie par $1 + sh^2$, s étant une constante indépendante de h, cette nouvelle expression peut encore représenter P_2, et le coefficient b change par là d'une manière arbitraire.

Puisque nous pouvons donner à b la valeur que nous voulons, nous ferons

$$b = 0.$$

Dans l'équation (b), posons

$$\mathrm{p}_1 = p_1 + h^2 \mathrm{p}_2, \quad \mathrm{B} = \beta + \mathrm{C}h^2,$$

et nous aurons les deux équations

$$\text{(II)} \qquad \frac{d^2 p_1}{d\alpha^2} + g^2 p_1 - 2\cos 2\alpha\, p + \beta \cos g\alpha = 0,$$

$$(c) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 = {} & \frac{d^2 \mathrm{p}_2}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2 \cos 2\alpha + \beta h^4 + \mathrm{C}h^6)\mathrm{p}_2 \\ & + (-2\cos 2\alpha + \beta h^2 + \mathrm{C}h^4) p_1 + (\beta + \mathrm{C}h^2) p + \mathrm{C}\cos g\alpha. \end{aligned} \right.$$

Pour résoudre l'équation (II), on doit remplacer $2\cos 2\alpha\, p$ par sa valeur

$$a\cos(g+4)\alpha + b\cos(g+2)\alpha + (a+c)\cos g\alpha + b\cos(g-2)\alpha + c\cos(g-4)\alpha,$$

puis substituer pour p_1

$$p_1 = d\cos(g+4)\alpha + e\cos(g+2)\alpha + f\cos g\alpha + h\cos(g-2)\alpha + k\cos(g-4)\alpha,$$

et l'on trouve, en égalant à zéro les coefficients des cosinus des arcs différents

$$d = -\frac{a}{8(g+2)}, \quad e = \frac{-b}{4(g+1)}, \quad h = \frac{b}{4(g-1)}, \quad k = \frac{c}{8(g-2)},$$
$$\beta = a + c.$$

b est laissé arbitraire dans ces formules; si l'on y suppose $b = 0$, on a

$$d = \frac{1}{32(g+1)(g+2)}, \quad e = 0, \quad h = 0, \quad k = \frac{1}{32(g-1)(g-2)},$$
$$\beta = \frac{1}{2(g^2-1)}.$$

Le coefficient f reste encore indéterminé; et, en effet, si l'on imagine obtenue l'expression de P_2 et qu'on la multiplie par $1 + sh^2 + th^4$, on changera non-seulement le coefficient b d'une manière arbitraire, mais aussi le coefficient f; ce qu'il y a de plus simple est donc de faire $f=0$.

Dans l'équation (c), posons

$$\mathrm{p}_2 = p_2 + h^2 \mathrm{p}_3, \quad \mathrm{C} = \gamma + \mathrm{D} h^2,$$

et nous aurons

$$\text{(III)} \qquad \frac{d^2 p_2}{d\alpha^2} + g^2 p_2 - 2\cos 2\alpha p_1 + \beta p + \gamma \cos g\alpha = 0,$$

$$(d) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = {} & \frac{d^2 \mathrm{p}_3}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2 \cos 2\alpha + \beta h^4 + \mathrm{C} h^6)\mathrm{p}_3 \\ & + (-2\cos 2\alpha + \beta h^2 + \mathrm{C} h^4) p_2 + (\beta + \mathrm{C} h^2) p_1 + \mathrm{C} p + \mathrm{D} \cos g\alpha. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons, dans l'équation (III), $2\cos 2\alpha p_1$ par

$$\begin{aligned} & d\cos(g+6)\alpha + e\cos(g+4)\alpha + (d+f)\cos(g+2)\alpha + (c+h)\cos g\alpha \\ & + (k+f)\cos(g-2)\alpha + h\cos(g-4)\alpha + k\cos(g-6)\alpha, \end{aligned}$$

et posons

$$\begin{aligned} p_2 = {} & l\cos(g+6)\alpha + m\cos(g+4)\alpha + n\cos(g+2)\alpha \\ & + \varpi\cos g\alpha + q\cos(g-2)\alpha + r\cos(g-4)\alpha + s\cos(g-6)\alpha; \end{aligned}$$

nous aurons

$$l = \frac{-d}{12(g+3)}, \quad m = \frac{-e}{8(g+2)}, \quad r = \frac{h}{8(g-2)}, \quad s = \frac{k}{12(g-3)},$$

$$n = \frac{-d-f+\beta a}{4(g+1)}, \quad q = \frac{k+f-\beta c}{4(g-1)}, \quad \gamma = e + h - \beta b = 0.$$

Telles sont les expressions de $l, m, n, \ldots$, quelles que soient les valeurs données à b et f; et si on les suppose nulles, on obtient

$$l = \frac{-1}{2^7.3(g+1)(g+2)(g+3)}, \quad m = 0, \quad r = 0, \quad s = \frac{1}{2^7.3(g-1)(g-2)(g-3)},$$

$$n = \frac{-(g^2+4g+7)}{2^7(g+1)^3(g-1)(g+2)}, \quad q = \frac{g^2-4g+7}{2^7(g-1)^3(g+1)(g-2)}, \quad \gamma = 0.$$

ϖ est indéterminé comme b et f, et nous le ferons nul aussi.

Maintenant que l'on voit quel genre de simplification amène l'hypothèse de la nullité de ces constantes qui sont arbitraires et que l'on reconnait qu'elle amène l'évanouissement des termes de rang pair dans $p, p_1, p_2, \ldots$, faisons immédiatement ces réductions dans les calculs suivants. Posons, dans l'équation (d),

$$\mathrm{p}_3 = p_3 + h^2 \mathrm{p}_4, \quad \mathrm{D} = \delta + \mathrm{E}h^2;$$

nous obtiendrons les deux équations

$$\text{(IV)} \qquad \frac{d^2 p_3}{d\alpha^2} + g^2 p_3 - 2\cos 2\alpha p_2 + \beta p_1 + \delta \cos g\alpha = 0,$$

$$(e) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 = {} & \frac{d^2 \mathrm{p}_4}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2 \cos 2\alpha + \beta h^4 + \mathrm{C}h^6)\mathrm{p}_4 \\ & + (-2\cos 2\alpha + \beta h^2 + \mathrm{C}h^4) p_3 + (\beta + \mathrm{C}h^2) p_2 \\ & + \mathrm{C}h^2 p_1 + (\delta + \mathrm{E}h^2) p + \mathrm{E}\cos g\alpha. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons dans l'équation (IV) $2\cos 2\alpha p_2$ par

$$\begin{aligned} & l\cos(g+8)\alpha + (l+n)\cos(g+4)\alpha + (q+n)\cos g\alpha \\ & \qquad + (q+s)\cos(g-4)\alpha + s\cos(g-8)\alpha, \end{aligned}$$

et posons

$$p_3 = \mathrm{R}_1 \cos(g+8)\alpha + \mathrm{R}_2 \cos(g+4)\alpha + \mathrm{R}_4 \cos(g-4)\alpha + \mathrm{R}_5 \cos(g-8)\alpha;$$

nous aurons

$$\mathrm{R}_1 = \frac{-l}{16(g+4)}, \quad \mathrm{R}_2 = \frac{-(l+n)+\beta d}{8(g+2)}, \quad \mathrm{R}_4 = \frac{q+s-\beta k}{8(g-2)}, \quad \mathrm{R}_5 = \frac{s}{16(g-4)},$$

$$\delta = q + n,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$\mathrm{R}_1 = \frac{1}{2^{11}.3(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)}, \quad \mathrm{R}_5 = \frac{1}{2^{11}.3(g-1)(g-2)(g-3)(g-4)},$$

$$\mathrm{R}_2 = \frac{g^3 + 7g^2 + 20g + 20}{2^8.3(g+1)^3(g-1)(g+2)^2(g+3)}, \quad \mathrm{R}_4 = \frac{g^3 - 7g^2 + 20g - 20}{2^8.3(g-1)^3(g+1)(g-2)^2(g-3)},$$

$$\delta = \frac{5g^2 + 7}{32(g^2-1)^3(g^2-2^2)}.$$

Mettons dans R les valeurs des premiers termes, et nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathrm{R} = g^2 + \frac{1}{2(g^2-1)}h^4 + \frac{5g^2+7}{32(g^2-1)^3(g^2-4)}h^8 \\ + \frac{9g^6+22g^4-203g^2-116}{64(g^2-1)^5(g^2-4)^2(g^2-9)}h^{12} + \ldots,\end{aligned}$$

en ajoutant un terme à ceux qui viennent d'être calculés.

61. Il est évident que l'on ne peut continuer ainsi le développement de P_2 et de la constante R sans se préoccuper de la valeur du nombre entier g, car le coefficient de h^4 contient en dénominateur le facteur $g-1$, le coefficient de h^8 le facteur $g-2$, le coefficient de h^{12} le facteur $g-3$, et ainsi de suite; de sorte que, quel que soit le nombre entier pris pour g, on finira par trouver un terme infini. On doit même arrêter le développement de R avant la rencontre d'un terme infini; car, pour qu'un terme de la constante puisse être admis, il faut que le terme de même ordre de P_2 puisse l'être lui-même.

Prenons pour exemple le cas où g est égal à 2. En appliquant les formules du cas général, on a

$$\mathrm{P}_2 = \cos 2\alpha + h^2\left(\frac{-1}{12}\cos 2\alpha + \frac{1}{4}\right) + h^4 p_1 + h^6 \mathrm{p}_2,$$
$$\mathrm{R} = 4 + \beta h^4 + \mathrm{C}h^6.$$

L'expression de p_1 renfermerait un coefficient k qui serait infini; mais comme on a

$$\begin{aligned}2\cos 2\alpha p &= 2\cos 2\alpha(a\cos 4\alpha + c) \\ &= a\cos 6\alpha + (a+2c)\cos 2\alpha,\end{aligned}$$

nous poserons

$$p_1 = d\cos 6\alpha + f\cos 2\alpha,$$

et, en substituant dans l'équation (II), nous aurons

$$(-32d - a)\cos 6\alpha + (\beta - a - 2c)\cos 2\alpha = 0;$$

par suite, on fera $f = 0$ et l'on aura

$$d = -\frac{a}{32} = \frac{1}{384}, \quad \beta = a + 2c = \frac{5}{12},$$

tandis que dans le cas général on a

$$\beta = a + c.$$

On peut aisément continuer ce calcul, en procédant comme on a fait dans le cas où g est un nombre entier quelconque.

Si g est égal à zéro, le développement que nous avons trouvé pour P_2 est applicable, et c'est même le seul cas où l'on puisse l'appliquer aussi loin que l'on veut.

Si $g=2$, on obtient par le calcul que nous avons commencé ci-dessus

$$\begin{aligned} P_2 = {} & \cos 2\alpha + h^2\left(-\frac{1}{12}\cos 4\alpha + \frac{1}{4}\right) + \frac{h^4}{384}\cos 6\alpha \\ & - h^6\left(\frac{1}{23040}\cos 8\alpha + \frac{43}{13824}\cos 4\alpha + \frac{5}{192}\right) \\ & + h^8\left(\frac{1}{2211840}\cos 10\alpha + \frac{287}{2211840}\cos 6\alpha\right) \\ & + h^{10}\left(\frac{-1}{309657600}\cos 12\alpha - \frac{41}{16588800}\cos 8\alpha \right. \\ & \qquad \left. + \frac{21059}{79626240}\cos 4\alpha + \frac{1363}{221184}\right) + \ldots, \end{aligned}$$

$$\text{A)} \quad R = 4 + \frac{5}{12}h^4 - \frac{763}{13824}h^8 + \frac{1002419}{79626240}h^{12} + \ldots.$$

Si $g = 4$, on a

$$\begin{aligned} P_2 = {} & \cos 4\alpha + h^2\left(-\frac{1}{20}\cos 6\alpha + \frac{1}{12}\cos 2\alpha\right) + h^4\left(\frac{1}{960}\cos 8\alpha + \frac{1}{192}\right) \\ & + h^6\left(\frac{-1}{80640}\cos 10\alpha - \frac{13}{96000}\cos 6\alpha + \frac{11}{17280}\cos 2\alpha\right) \\ & + h^8\left(\frac{1}{10321920}\cos 12\alpha + \frac{23}{6048000}\cos 8\alpha - \frac{1}{92160}\right) \\ & - h^{10}\left(\frac{1}{1857945600}\cos 14\alpha + \frac{53}{1032192000}\cos 10\alpha \right. \\ & \qquad \left. + \frac{4037}{2419200000}\cos 6\alpha + \frac{439}{62208000}\cos 2\alpha\right) + \ldots, \end{aligned}$$

$$\text{(B)} \quad R = 16 + \frac{1}{30}h^4 + \frac{433}{864000}h^8 - \frac{189983}{21772800000}h^{12} + \ldots.$$

Les développements (A) et (B) ne contiennent que des puissances paires de h^2, et nous démontrerons plus loin que R jouit de cette propriété toutes les fois que g est pair.

Pour $g = 1$, on a les formules suivantes :

$$P_2 = \cos\alpha - \frac{h^2}{8}\cos 3\alpha + h^4\left(\frac{1}{192}\cos 5\alpha - \frac{1}{64}\cos 3\alpha\right)$$
$$- h^6\left(\frac{1}{9216}\cos 7\alpha - \frac{1}{1152}\cos 5\alpha + \frac{1}{1536}\cos 3\alpha\right)$$
$$+ h^8\left(\frac{1}{737280}\cos 9\alpha - \frac{1}{49152}\cos 7\alpha + \frac{1}{24576}\cos 5\alpha + \frac{11}{36864}\cos 3\alpha\right) + \ldots,$$

$$R = 1 + h^2 - \frac{1}{8}h^4 - \frac{1}{64}h^6 - \frac{1}{1536}h^8 + \frac{11}{36864}h^{10} + \ldots.$$

Pour $g = 3$, on a

$$P_2 = \cos 3\alpha + h^2\left(-\frac{1}{16}\cos 5\alpha + \frac{1}{8}\cos\alpha\right) + h^4\left(\frac{1}{640}\cos 7\alpha + \frac{1}{64}\cos\alpha\right)$$
$$+ h^6\left(\frac{-1}{46080}\cos 9\alpha - \frac{7}{20480}\cos 5\alpha + \frac{1}{1024}\cos\alpha\right)$$
$$+ h^8\left(\frac{1}{2^{14}.3^2.5.7}\cos 11\alpha + \frac{17}{2^{15}.3^2.5}\cos 7\alpha - \frac{1}{2^{14}}\cos 5\alpha - \frac{1}{2^{12}}\cos\alpha\right) + \ldots,$$

$$R = 9 + \frac{1}{16}h^4 + \frac{1}{64}h^6 + \frac{13}{20480}h^8 - \frac{5}{16384}h^{10} + \ldots.$$

DÉVELOPPEMENTS DE P_1 ET DE LA CONSTANTE R, SUIVANT LES PUISSANCES DE c.

62. Proposons-nous maintenant de développer P_1, et, comme pour une même valeur du nombre entier g la constante R a une valeur différente dans P_1 et P_2, nous la représenterons dans les deux cas par R_1 et R_2. Ainsi nous avons l'équation différentielle

$$(m) \qquad \frac{d^2P_1}{d\alpha^2} + (R_1 - 2h^2\cos 2\alpha)P_1 = 0,$$